PART2　ベクトルの成分と平行，座標と成分表示

2　[1]　(1)　$|\vec{a}|=2$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2)　$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ において，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行であるとき，実数 x の値を求めよ。また，このとき $|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。

[2]　4 点 A(1, 2)，B(3, 5)，C(4, 8)，D(x, y) について，次の問いに答えよ。

(1)　四角形 ABCD が平行四辺形になるように x，y の値を定めよ。

(2)　4 点 A，B，C，D が平行四辺形の頂点となるように x，y の値を定めよ。

Point Pickup

[1]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ $(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$ のとき

$\vec{a}\parallel\vec{b}$　$\Longleftrightarrow$　$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

$\Longleftrightarrow$　$a_1b_2-a_2b_1=0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ と $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ である。

[2]　A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2) のとき

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

四角形 ABCD が平行四辺形　$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

第 7 講　PART2　確認問題

1 $|\vec{a}|=\dfrac{1}{3}$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。選択肢は最も適切なものを選べ。

　　[ア]

① $\vec{a}$　　② $-\vec{a}$　　③ $\vec{a}$, $-\vec{a}$

④ $\dfrac{1}{3}\vec{a}$　　⑤ $-\dfrac{1}{3}\vec{a}$　　⑥ $\dfrac{1}{3}\vec{a}$, $-\dfrac{1}{3}\vec{a}$

⑦ $3\vec{a}$　　⑧ $-3\vec{a}$　　⑨ $3\vec{a}$, $-3\vec{a}$

2 $\vec{a}=(3,\ t)$, $\vec{b}=(-4,\ 8)$ において，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ が平行であるとき，実数 t の値を求めよ。また，このとき，$|2\vec{a}+\vec{b}|:|\vec{a}+2\vec{b}|$ を求めよ。ただし，最も簡単な整数の比で答えよ。

　　$t=$ [イウ]

　　$|2\vec{a}+\vec{b}|:|\vec{a}+2\vec{b}|=$ [エ] : [オ]

3 4 点 A(5, 3), B(1, 2), C(2, −1), D(x, y) について，次の問いに答えよ。

(1) 四角形 ABCD が平行四辺形になるように x, y の値を定めよ。

　　$(x,\ y)=($[カ], [キ]$)$

(2) 4 点 A, B, C, D が平行四辺形の頂点となるように x, y の値を定めよ。

　　$(x,\ y)=($[ク], [ケ]$)$, $($[コサ], [シス]$)$,

　　　　　$($[セ], [ソ]$)$

　　ただし，[ク] > [セ] とする。

PART2　ベクトルの成分と平行，座標と成分表示

2　［1］ (1) $|\vec{a}|=2$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ において，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行であるとき，実数 x の値を求めよ。また，このとき $|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。

［2］ 4 点 A$(1,\ 2)$，B$(3,\ 5)$，C$(4,\ 8)$，D$(x,\ y)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 四角形 ABCD が平行四辺形になるように x，y の値を定めよ。

(2) 4 点 A，B，C，D が平行四辺形の頂点となるように x，y の値を定めよ。

［1］ (1) $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{a}$ と同じ向きのものは $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{a}$ と反対向きのものは $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

(2) $\vec{a}+3\vec{b}=(x+6,\ -10)$　　$\vec{a}-\vec{b}=(x-2,\ 2)$

$\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行となるのは，

$\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$ となる実数 k が存在するときである。

$(x+6,\ -10)=k(x-2,\ 2)$　より

$x+6=k(x-2)$ …… ①，　$-10=2k$ …… ②

②より　$k=-5$

このとき①より　$x+6=-5(x-2)$

よって　$x=\dfrac{2}{3}$

$k=-5$　より　$\vec{a}+3\vec{b}=-5(\vec{a}-\vec{b})$

よって　$|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|=5:1$

(x を求める別解)

$(\vec{a}+3\vec{b})\parallel(\vec{a}-\vec{b})$ より　$(x+6)\cdot 2-(-10)\cdot(x-2)=0$　　よって $x=\dfrac{2}{3}$

［2］ (1) 四角形 ABCD が平行四辺形になるとき

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

つまり $(2,\ 3)=(4-x,\ 8-y)$　　$4-x=2,\ 8-y=3$

よって　$x=2,\ y=5$

(2) 四角形 ABDC が平行四辺形になるとき

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

つまり $(2,\ 3)=(x-4,\ y-8)$　　$x-4=2,\ y-8=3$

よって　$x=6,\ y=11$

四角形 ADBC が平行四辺形になるとき

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$$

つまり $(x-1,\ y-2)=(-1,\ -3)$　　$x-1=-1,\ y-2=-3$

よって　$x=0,\ y=-1$

これらと(1)の結果より，4 点 A，B，C，D が平行四辺形の頂点となるときの x，y の値は

$$(x,\ y)=(2,\ 5),\ (6,\ 11),\ (0,\ -1)$$

第 7 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑨

[解説]

$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{a}$ と同じ向きのものは　$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=3\vec{a}$ [A]

$\vec{a}$ と反対向きのものは　$-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=-3\vec{a}$

よって，求める単位ベクトルは　$\boldsymbol{3\vec{a}}$，$\boldsymbol{-3\vec{a}}$

[A]　$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは

$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ と $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

2

[正解] イウ：-6，エ：2，オ：5

[解説]

$2\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 2t+8)$

$\vec{a}+2\vec{b}=(-5,\ t+16)$

$2\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}+2\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ が平行となるのは

$2\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}+2\vec{b})$ [B]

となる実数 k が存在するときである。

$(2,\ 2t+8)=k(-5,\ t+16)$ より

$2=-5k$ ……①

$2t+8=k(t+16)$ ……②

①より　$k=-\dfrac{2}{5}$

このとき，②より　$2t+8=-\dfrac{2}{5}(t+16)$

よって　$\boldsymbol{t=-6}$

$k=-\dfrac{2}{5}$ より　$2\vec{a}+\vec{b}=-\dfrac{2}{5}(\vec{a}+2\vec{b})$

ゆえに　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\dfrac{2}{5}|\vec{a}+2\vec{b}|$

[B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ $(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$ のとき

$\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

$\iff a_1b_2-a_2b_1=0$

よって　$\boldsymbol{|2\vec{a}+\vec{b}|:|\vec{a}+2\vec{b}|=2:5}$

（t を求める別解）

$(2\vec{a}+\vec{b}) /\!/ (\vec{a}+2\vec{b})$ より

$$2\times(t+16)-(2t+8)\times(-5)=0$$ [B]

よって　$\boldsymbol{t=-6}$

3

[正解] カ：6，キ：0，ク：6，ケ：0，コサ：−2，
シス：−2，セ：4，ソ：6

[解説]

(1)　四角形 ABCD が平行四辺形になるとき

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ [C]

すなわち

$(-4,\ -1)=(2-x,\ -1-y)$ [D]

$2-x=-4,\ -1-y=-1$

よって

$\boldsymbol{(x,\ y)=(6,\ 0)}$

(2)　四角形 ABDC が平行四辺形になるとき

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ [C]

すなわち

$(-4,\ -1)=(x-2,\ y+1)$ [D]

$x-2=-4,\ y+1=-1$

よって

$(x,\ y)=(-2,\ -2)$

四角形 ADBC が平行四辺形になるとき

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ [C]

すなわち

$(x-5,\ y-3)=(-1,\ 3)$ [D]

$x-5=-1,\ y-3=3$

よって

$(x,\ y)=(4,\ 6)$

これらと(1)の結果より，4 点 A，B，C，D が平行四辺形の頂点となるときの x，y の値は

$\boldsymbol{(x,\ y)=(6,\ 0),\ (-2,\ -2),\ (4,\ 6)}$

[C]　四角形 ABCD が平行四辺形
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

[D]　A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ のとき
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)$
$=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$